Heimaæfingar í stærðfræði, 3.bekk A

Bjarni Benediktsson – Menntaskólinn í Reykjavík – Heimaæfingar

Tekið af vef Borgarskjalasafnsins

bjarnibenediktsson.is

Einkaskjalasafn nr. 360
Uppvaxtar- og námsár
Askja 1-1, Örk 5

Bjarni Benediktsson.
3. bekk. A.

Heima-æfingar
í
Stærð-fræði,
gjörðar
af
Bjarna Benediktssyni
3. bekk. A.

1. dæmi.

Hvernig eru þessar lengdir ritaðar í metrum: 3 dm, 4 cm; 0,7 hm; 48,75 mm; 92,8 km; 11,4 dam?

Þær eru ritaðar svona: 0,3 m, 0,04 cm, 70 m, 0,04875 m, 92800 m, 114 m.

R

B

Bjarni Benediktsson

2. dæmi.

18,136 + 27,625 + 93,187 + 19,3 + 9,167 + 8,52 + 9,162 + 7,158 + 9,163 + ~~9~~ 7,6 + 8,593 + 4,612 + 17,62 + 25 + 9,143 + 8,614 + 7,126 + 8,13 + 7,613 + 9,142 + 8,316 + 7,53 + 9,4 + 8,43 + 7,62 + 19,23 + 8,45 + 7,38 + 9,6 + 7,135.

18,136
27,625
93,187
19,300
9,167
8,520
9,162
7,158
9,163
7,600
8,593
4,612
17,620
25,000
9,143
8,614
7,126
8,130
7,613
9,142
8,316
7,530
9,400
8,430
7,620
19,230
8,450
7,380
9,600
7,135
407,702

R

407,702.

3. dæmi.

Í búð nokkurri er afgangur af klæðisstranga, sem er 5,2 m. á lengd og kostar hver m. af klæðinu 43,68 kr. Maður nokkur ætlar nú að kaupa 3,6 m. af stranganum. En kaupmaður býður honum, það sem þá yrði eftir fyrir $\frac{1}{3}$ hluta verðs, svo hann kaupir alt klæðið. Hve mikið kostar þá hver meter?

$5,2 - 3,6 = 1,6$

$43,68 \times 3,6$: 26208, 13104 → 157,248

3) 43,68 (14,56

3, 13, 12, 16, 15, 18

$14,56 \times 1,6$: 8736, 1456 → 23,296

$157,248 + 23,296 = 180,544$

5,2) 180,544 (34,72

156, 245, 208, 374, 364, 104, 104, 0

34,72 kr.

R

Fyrst dreg eg það sem maðurinn ætlaði að kaupa, frá því sem til var, þá kemur það út sem hann fekk fyrir $\frac{1}{3}$ verðs. Síðan margfalda 3,6 með 43,68 og kemur þá út hve mikið það kostaði, sem hann ætlaði í upphafi að kaupa. Síðan deili eg með 3 í 43,68, því þá kemur út $\frac{1}{3}$ verðsins. Síðan margfalda eg þá upphæð með 1,6, því þá kemur ~~þa~~ út, hve mikið það kostaði sem hann fekk fyrir $\frac{1}{3}$ verðs. Svo legg eg þá útkomu við 157,248, því þá kemur út hve mikið það kostaði samtals, sem hann keypti. Svo deili eg í þá tölu með 5,2 og kemur þá verðið á hverjum m.

4. dæmi.

$6\frac{2}{7}+7\frac{2}{3}+9\frac{5}{6}+3\frac{4}{5}+7\frac{5}{14}+9\frac{4}{15}+8\frac{1}{2}+14\frac{11}{21}.$

$$\begin{array}{lll} & \underline{210} & \\ 6\frac{2}{7} & -30 & -60 \\ 7\frac{2}{3} & -70 & -140 \\ 9\frac{5}{6} & -35 & -175 \\ 3\frac{4}{5} & -42 & -168 \\ 7\frac{5}{14} & -15 & -75 \\ 9\frac{4}{15} & -14 & -56 \\ 8\frac{1}{2} & -105 & -105 \\ 14\frac{11}{21} & -10 & -110 \\ \hline 63 & & \end{array}$$

2	7-3-6-5-14-15-2-21
3	7-3-3-5-7-15-1-21
5	7-1-1-5-7-5-1-7
7	7-1-1-1-7-1-1-7
	1-1-1-1-1-1-1-1

$\frac{889}{210}=4\frac{7}{30}, \quad 63+4\frac{7}{30}=67\frac{7}{30}.$

R

$\underline{\underline{67\frac{7}{30}}}.$

5. dæmi.

$2\frac{3}{13}+1\frac{5}{21}+2\frac{10}{33}+1\frac{14}{39}+2\frac{17}{77}+2\frac{59}{91}.$

$$\begin{array}{lll} & \underline{3003} & \\ 2\frac{3}{13} & -231 & -693 \\ 1\frac{5}{21} & -143 & -715 \\ 2\frac{10}{33} & -91 & -910 \\ 1\frac{14}{39} & -77 & -1078 \\ 2\frac{17}{77} & -39 & -663 \\ 2\frac{59}{91} & -33 & -1947 \\ \hline 10. & & \end{array}$$

3	13-21-33-39-77-91
7	13-7-11-13-77-91
11	13-1-11-13-11-13
13	13-1-1-13-1-13
	1-1-1-1-1-1

$\frac{6006}{3003}=2, \quad 10+2=\underline{\underline{12}}.$

R

$\underline{12.}$

6. dæmi

Kaupmaður seldi vörur sínar með 10% afslætti, frá venjulegu útsöluverði. Ef hann hefði lagt 3% meira á hana í fyrstu, en hann gerði, ~~hf~~ hefði hann getað selt hana með 12% afslætti, og þó haft sama ágóða og hann hafði. Hve mörg % hefur hann í upphafi lagt á vöruna?

~~$100+x-\frac{(100+x)10}{100}$~~ Varan kostaði í upphafi 100; kaupmaðurinn lagði á hana x; og vanalegt útsöluverð var 100+x.

$$100+X-\frac{(100+x)10}{100}=100+X+3-\frac{(103+X)12}{100};$$

$$10000+100x-(100+x)10=10000+100X+300-(103+x)12;$$

$$\underline{10000}+\underline{100}x-1000-10x=\underline{10000}+\underline{100X}+300-1236-12x;$$

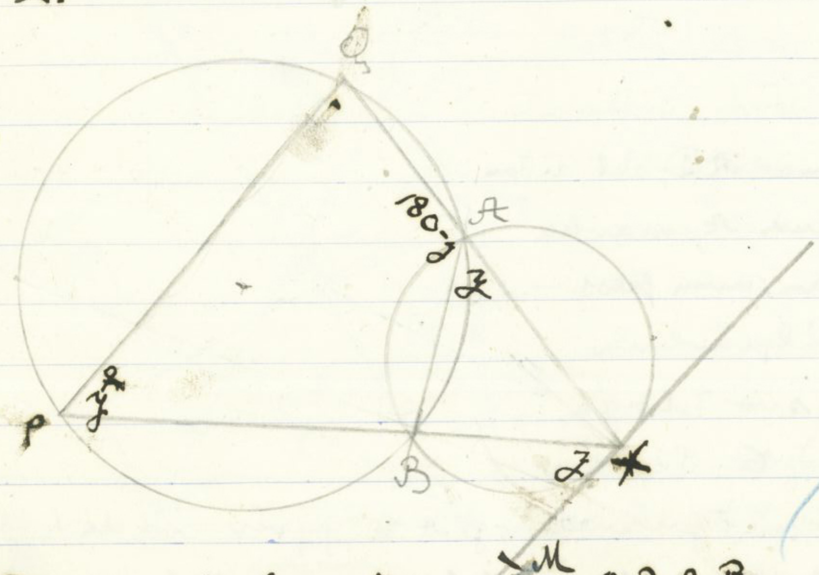
$$-10x+12x=300-1236+1000;\ 2x=64;\ \underline{\underline{x=32}};$$

R

31. jan. 1923.

1. dæmi.

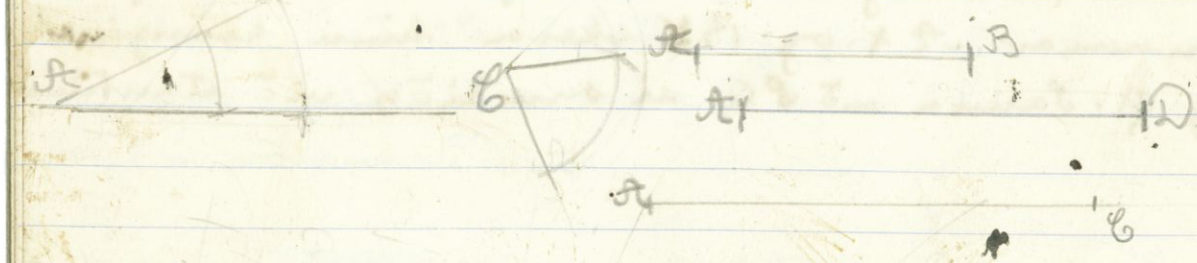
Tveir hringar skerast í A og B, punkturinn X á öðrum hringnum, er tengdur við A og B, og línurnar AX og BX skera hinn hringinn í P og Q. Sanna að PQ sé samsíða við snertilínu í X.



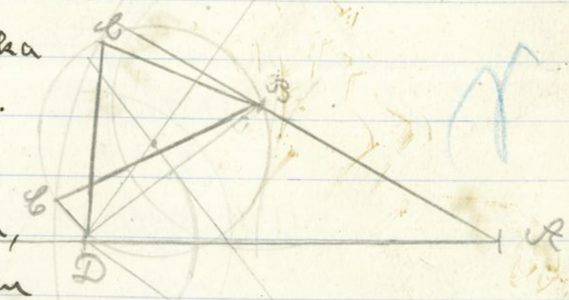
Þar sem ferhyrningurinn QPAB er innritaður í hring þá eru gagnstæð horn samanlögð 180°; þar af leiðandi er hornið QAB 180−y (þegar Þar kallað y). En þegar ∠QAB er 180−y er ∠BAX auðsjáanlega y°. En nú mælist það við sama boga og ∠BXM (bæði eru ferilhorn). Þá er sannað að ∠BXA er y°. En þá er BXA = QPB. En þar með er sannað að snertilínan í X og PQ eru samsíða, þar sem innanverð víxlhorn eru jafnstór.

2. dæmi

Teikna ferhyrning ABCD. Tvö gagnstæð horn A og C eru gefin. Ennfremur hliðarnar AB og AD, og hornalínan AC.

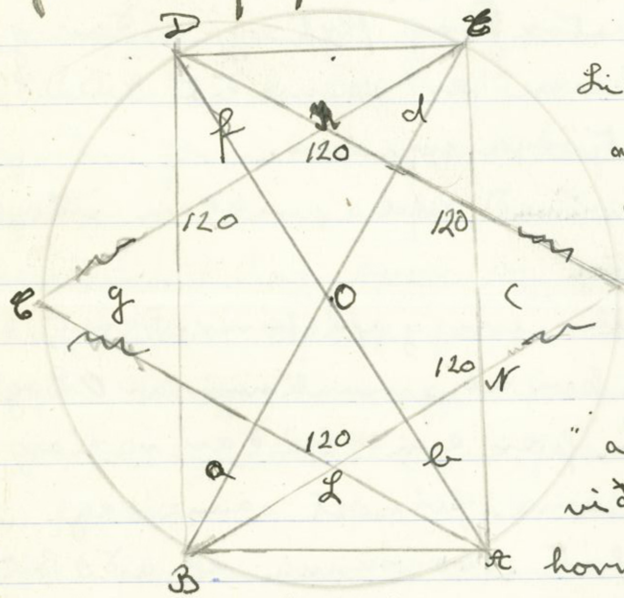


Fyrst dreg eg línuna AD, set síðan hornið A við punktinn A, marka svo AB út á annan arm þess. Síðan dreg eg hjálparlínu AD, set og dreg svo boga, sem tekur hornið C. Síðan dreg sirkil með miðju í A og AC fyrir radíða, þar sem sá sirkil ~~snert~~ sker sirkilinn, sem tók ∠C, verður ∠C. Í þessu tilfelli verður það á tveimur stöðum og eru því lausnirnar tvær. Ef hringarnir skerast hvergi er lausnin engin, ef ~~þar~~ þeir snertast er lausnin ein. Fleiri en tvær geta þær eigi verið.



3. dæmi.

Hringferli er skift í 6 jafnstóra parta og eru skiftipunktarnir tengdir saman þannig, að tengilínur þeirra eru hliðar í tveim jafnhliða △. Við það kemur fram einsog ~~stjörnu~~-mynd. Hve mikill hluti er flatarmál þeirrar myndar af flatar-máli ~~hringsins~~?



Litlu △ a, b, c, d, f og g eru allir hver um sig jafnhliða og allir jafnstórir einsog eg mun nú sanna. T.d. ætla eg að sanna að △ b sé jafnhliða. Hornið A í honum er 60°, því að það er ferilhorn og mælist við ½ 120° boga. Ennfremur er hornið við L 60° því það mælist við ½ summu boganna, sem verða á milli arma þess, en hún er 60. Nákvæmlega er eins farið með að sanna að ∠ við N sé 60°. ~~Ná~~ Því næst sanna eg að þeir séu allir jafnstórir og gjöri eg það þannig að öll hornin eru eins í þeim, (því það er sannað áður). ennfremur er ein hlið líka eins, því að ⊙ hyrningurinn ~~við~~ innan í, er reglulegur, sakir þess að hvert horn í honum er 120°, því þau mælast við ½ summu bogana, sem eru á milli arma þeirra, en hún er við hvert horn fyrir sig, 120.

Því ~~næst~~ sanna eg að △ ABL sé jafn að flatarmáli og △ b, og er það af því að hæðin ~~frá punktinum að~~ á BK í △ ABK er sú sama og hæðin á LN í △ b. ~~sameiginleg fyrir báða~~ △. Einnig eru BL og LN jafnlangar, einsog áður er sannað, og er þá sannað að flatarmál þeirra sé jafnt. En þá er mér leyfilegt að flytja △ C og setja hann ofan í △ ABL. Nákvæmlega eins er sannað að △ DEK er jafnstór F og flyt eg síðan g ofan í hann. En með þessu er sannað □ ABDE er jafn að flatarmáli stjörnu myndinni.

Síðan dreg eg 2 miðstrengi með endapunktum í E og B og í A og D.

Þá koma fram 4 △ sem allir eru jafnstórir. Fyrst sanna eg að AOB = OEA, því að grunnlínurnar OB og OE eru jafnlangar því þær eru báðar radíar, og hæðin á þær er sú sama. Því næst sanna eg að DOB = DOE á sama hátt. Svo sanna eg að OBA = ODE, því allar hliðarnar eru jafnlangar, einsog auðséð er.

En þar sem áður er sannað í bókinni að flatarmál jafnhliða △ ~~sé~~ með hliðinni a sé $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; þá er auðséð að flatarmál DBAE er $4(\frac{r^2}{4}\sqrt{3})$; því að AOB er jafnhliða △ með hliðinni r.

$4(\frac{r^2}{4}\sqrt{3}) = r^2\sqrt{3}$; $\quad \frac{\cancel{r^2\sqrt{3}\cdot 22}}{\frac{22}{7}\cdot 7} \quad \frac{r^2\cdot\sqrt{3}}{r\cdot\frac{22}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{22}{7}} \left(-\frac{12,11}{22} = \frac{1211}{2200}\right.$

4. dæmi.

Í verksmiðju þar sem daglegur vinnutími er 10 kl., er verkafólkinu skipt í 3 launaflokka. Í 1. fl. er kaupið 0,80 kr á kl. Í 2. fl. er kaupið ~~60~~ 0,60 kr á kl; og í 3. fl. er kaupið 0,50 kr. á kl. Í 1. fl. eru helmingi færri menn, en í 2. fl; í 3. fl. eru 145 menn. 2 % af kaupinu, sem borgað er vikulega fyrir 6 daga í einu, er haldið eftir 2 %, sem ganga til sjúkrasjóðs. Þeir sem veikir eru fá ½ kaup. 1 viku voru veikir í 1. fl.: 1 maður í 2 daga. Í 2. fl.: 2 í 3 daga hvor, 2 í 1 dag hvor og ~~einn~~ alla vikuna. Í 3. f.: 2 í 1 dag hvor. Eftir þessa viku var fólkinu borgað 4561,90 kr. í kaup, þegar búið var að draga sjúkrasjóðstillagið frá. Hve margir voru í 1. og 2. flokk.

Í 1. flokki eru x menn og í 2. flokki 2 x.

Þá átti að borga fyrir 1. fl. ef enginn væri veikur og engar % teknar frá 4800 x. En þegar hálft kaup þess sem veikur var, er dregið frá og % teknar lítur þetta þannig út: $4800x - 800 - \frac{(4800x - 800)2}{100}$;

Ef engir væru veikir í 2 fl, og engar % teknar þá væri fólkinu þar borgað 72000; en þegar þetta hvorttveggja ~~er~~ er dregið frá lítur það svona út: $7200 - 4200 - \frac{(7200x - 800)2}{100}$; í 3. fl. var fólkinu borgað 131810, sem séstaf því ef ~~margfaldað er saman~~ það sem gefið er er veikum

Þá lítur líkingin sem x er fundið úr þannig:

$$4800x-800-\frac{(4800x-800)2}{100}+7200x-4200-\frac{(7200-4200)2}{100}$$
$$+131810=456190;$$

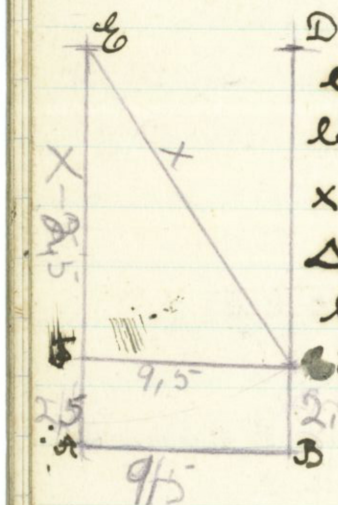
$$4800x-800-96x+16+7200x-4200-144x+84+131810$$
$$=456190; \quad 11760x=329280; \quad x=28; \quad 2x=56.$$

Í fyrsta flokki voru 28 menn;
Í öðrum flokki voru 56 menn;

7. febrúar. 1923.

1. dæmi.

Flaggstengurnar fyrir ofan Stjórnarráðs-húsið standa jafnhátt og eru jafnháar, bilið á milli þeirra er $9\frac{1}{2}$ m. Þegar strengurinn á þeirri nyrðri hefir niðri nemur hann við jörð. En ef farið er með endann suðrað hinni stönginni og strengt á strengnum nemur endinn við stöngina $2\frac{1}{2}$ m. fyrir ofan jörð. Hve háar eru stengurnar? (Það er gjört ráð fyrir að strengurinn sé óteygjanlegur).



Línan AB er ~~(9,5)~~ 9,5 en þá er CF það líning því hún er skorin eins og AB af samsíða línum og AB. Línan EC er gefin að vera x og EF x−2,5. En nú er þetta rétthyrndur Δ, og gildir því Pýþagorasar-regla um hann. Þá lítur líkingin sem x er fundið úr þannig út: $(x-2,5)^2+9,5^2 = x^2$.

$\cancel{x^2+6,25+90,25}$

$x^2-5x+6,25+90,25=x^2$; $6,25+90,25=5x$;

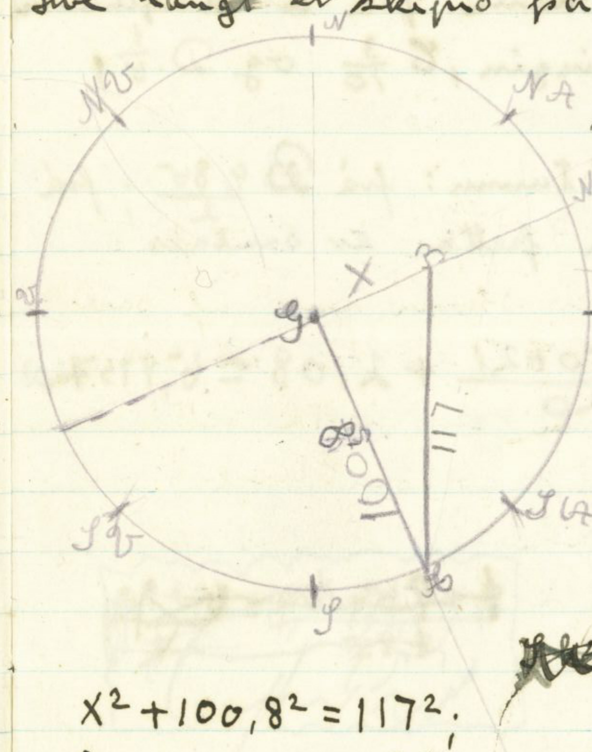
$x=\frac{96,50}{5}$; $x=19,3$;

Stengurnar eru hvor um sig 19,3 m.

N

2. dæmi.

Skip, sem fer 18 km á kl, fer frá grynnu nokkurri og stefnir mitt á milli suðurs og suð ~~vesturs~~ austurs. Eftir 5 kl. og 36 mín. snýr það við og heldur nú hér um bil til norðurs í $6\frac{1}{2}$ kl. Þá er grynnan að sjá frá skipinu mitt á milli ~~suðurs~~ vesturs og suð vesturs. Hve langt er skipið þá frá grynnunni.



Hornið CGB er 90° því að það mælist við 90° boga; (þar sem ⌣ CA er $22\frac{1}{2}$° og ⌣ SAA er 45° og AN er $22\frac{1}{2}$°. Þá gildir Pýþagorasar-regla um Δ GCB

$\cancel{x^2+(100\tfrac{4}{5})^2=117^2}$;

$\cancel{x^2=117^2-100\tfrac{4}{5}^2}$; $\cancel{x=\sqrt{117^2-100\tfrac{4}{5}^2}}$;

$x^2+100,8^2=117^2$;

$x^2=117^2-100,8^2$; $x^2=(117+100,8)\cdot(117-100,8)$.

$x^2=217,8\cdot 16,2$; $x^2=3528,36$; $x=\sqrt{3528,36}$;

$x=59,4$;

Skipið var 59,4 km frá grynnunni.

N

3. dæmi.

A. hefur keypt korn fyrir 9,15 kr. tunnuna. Helmingin af því selur hann B. fyrir 9,85 tunnuna; $\frac{3}{5}$ af því sem eftir er selur hann C fyrir 10,00 kr tunnuna; það sem ~~þá~~ er eftir selur hann D fyrir 10,40 kr. tunnuna. Nú verður C gjaldþrota og fær A aðeins hjá honum 35%. Hve mörgum % tapar hann þá á kaupunum.

Af 1 tunnu fær B helmingin, C $\frac{3}{10}$ og D $\frac{1}{5}$;

Þá fær A borgað fyrir 1 tunnu: frá B $\frac{9,85}{2}$, frá C $\frac{3 \cdot 10 \cdot 35}{10 \cdot 100}$, og frá D $\frac{10,40}{5}$, en þetta er samtals

$$= \frac{9,85}{2} + \frac{3 \cdot 7}{20} + 2,08 = \frac{98,50+21}{20} + 2,08 = 5,975 + 2,08$$

$= 8,055$. ~~þá set ég~~

A 9,15 tapar hann 1,095.
A 100 — — — — x,

$$x = \frac{1,095 \cdot 100}{9,15} = \frac{7,3}{0,61} = \frac{730}{61} = 11,966,$$ þetta er svo nærri 12%, að óhætt er að segja að hann hafi tapað 12% á kaupunum.

21. febrúar 1923.

1. dæmi

Skift 672,75 kr. í 3 hluti, þannig að 1. hlutinn sé 110% móts við þann annan, en 90% móts við þann 3.

Fyrsti hlutinn er x; $\frac{x}{y} = \frac{110}{100}$; $100x = 110y$; $10x = 11y$ (1)

annar ——— y; $10x = 9z$ (2).

þriðji ——— z; $x+y+z = 672,75$ kr.

$10x - 11y = 0$ (1)

$-10x \mp 9z = 0$ (2)

$9z - 11y = 0$

$\cancel{-10x + 9z = 0}$ (2)

$\cancel{10x}$

$-10x \mp 9z = 0$ (2)

$10x + 10z + 10y = 6727,5$ (3)

$19z + 10y = 6727,5$

$-110y \mp 90z = 0$

$110y + 209z = 74002,5$

$299z = 74002,5$; $z = 247,50$; $x = \frac{247,50 \cdot 90}{100} = 222,75$;

$y = \frac{222,75 \cdot 100}{110} = 202,50$;

R

Fyrsti hlutinn er 222,75 kr.

Annar ——— 247,50 kr.

Þriðji ——— 202,50 kr.

672,75 kr.

2. dæmi.

Full fata af ~~vatni~~ mjólk vegur $15\frac{5}{8}$ kg., en full af vatni vegur hún $14\frac{3}{4}$ kg. Eðlisþyngd mjólkur er $1\frac{23}{742}$. Hve mikið vegur fatan tóm.

Það sem fatan vegur kalla eg x; þá set ~~up~~ það, sem gefið er upp, í líkingu, sem lítur þannig út: $\frac{15\frac{5}{8} - x}{14\frac{3}{4} - x} = \frac{1\frac{23}{742}}{1}$; nú margfalda eg í líkinguna í kross og kemur þá $\frac{121}{8} - x = \frac{59 \cdot 765}{4 \cdot 742} - \frac{765}{742}x$; Samnefnari er 5936,12

$121 \cdot 742 - 5936x = 2 \cdot 59 \cdot 765 - 6120x \cdot 89782 - 5936x = 90270 - 6120x \cdot 6120x - 5936x = 90270 - 89782$; $184x = 488$.

$x = 2\frac{15}{23}$;

Þá vegur fatan tóm $2\frac{15}{23}$.

R

3. dæmi.

Eftir bruna nokkurn var útbýtt 680 kr. til verðlauna. Upphæðinni var þannig skift, að 3 úr liðinu, sem gengið höfðu best fram, fengu helmingi meira en hver hinna, svo að hinir séðari fengu 6 kr. minna en þeir hefðu fengið hver af upphæðinni hefði verið skift jafnt á milli allra. Hve mikið fékk hver.

Eg segi að x menn séu í liðinu samtals; þá fengu $x-3$ menn y kr ~~hver~~ en 3 menn fengu $2y$ kr hver.

$(x-3)y + 6y = 680$; $xy - 3y + 6y = 680$; $y = \frac{680}{x} - 6$;

$$\begin{array}{r} xy - 3y + 6y = 680; \\ -xy \mp 6x = -680; \\ \hline 3y - 6x = 0; \end{array} \quad y = 2x;$$

þá er $2x = \frac{680}{x} - 6$; $2x^2 = 680 - 6x$;

$2x^2 + 6x - 680 = 0$;

$x^2 + 3x - 340 = 0$;

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 340}$; $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1369}{4}}$; þá dreg eg kvadratrótina af 1369 út, og er hún 37; $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{37}{2}$; $x = \begin{cases} +17 \\ -20 \end{cases}$;

Nú kallaði eg ~~x~~ mennina x og er þá auðséð, að þeir geta eigi verið negativir, ~~þeir~~ x var því 34; y var $= 2x = 34$; þá fá

17 menn 34 kr. hver, en 3 menn 68 kr. hver.

R

4. dæmi.

Sanna að ef x sé heiltala, sem 3 ganga ekki upp í, þá gangi 6 upp í töluna $x^2 - 3x + 2$.

Fyrst leysi eg $x^2 - 3x + 2$ ~~töluna~~ upp í faktora og kemur þá $(x-1)(x-2)$; Af nú var gefið að 3 gangi ekki upp í x, en þá er auðséð að 3 ganga annaðhvort upp í $(x-1)$ eða $(x-2)$, vegna þess að ef 3 er deilt inn í tölu, sem 3 ganga ekki upp í þá gengur ætíð annaðhvort 1 eða 2 af. Nú er annaðhvort $(x-1)$ eða $(x-2)$ jöfnutala, einsog auðséð er, en þá er hin auðvitað oddatala, en þegar oddatala er margfölduð með jafnri tölu, þá ~~kemur~~ út jöfnutala ~~út~~, sem 3 ganga upp í. En upp í öllum jöfnum tölum ganga 2, en í þeirri tölu sem bæði 2 og 3 ganga upp í ganga einnig 6 upp, sakir þess að 6 er $= 2 \cdot 3$; Q. e. d.

R

21 mars 1923.

1. dæmi.

A. átti 22000 kr., sem hann setur á vöxtu og vaxtavöxtu í 2 ár. Fyrra árið fær hann $8\frac{1}{3}\%$ en síðara árið $12\frac{1}{2}\%$. B. á einnig, sem hann setur á vöxtu og vaxtavöxtu í 2 ár. Hann fær fyrra árið 10%, en síðara árið 25% og á þá jafnmikið og A. Hve mikið átti B. í upphafi?

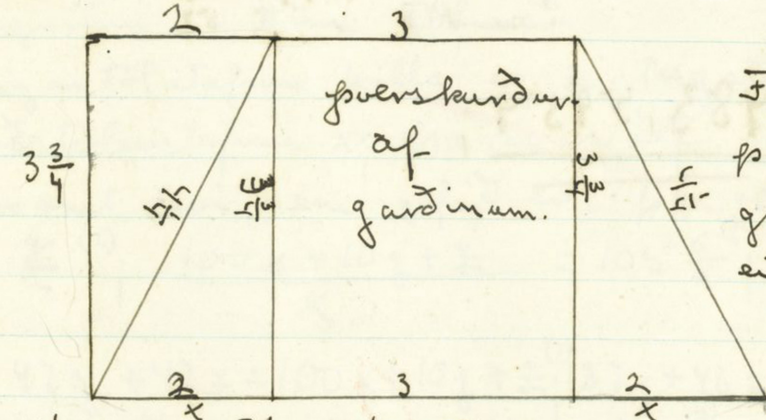
Þegar þessi 2 ~~árin~~ eru er lokið þá á A. 26812,50. en B á $\left[x+\left(\frac{x}{10}\right)+\left(\frac{x+\frac{x}{10}}{4}\right)\right]$; þá er $\left[x+\left(\frac{x}{10}\right)+\left(\frac{x+\frac{x}{10}}{4}\right)\right] = 26812,50$;

$55x = 1072500,00$; $x = 1950000$; þá átti B í upphafi

<u>19500,00 kr.</u>

2. dæmi.

Flóðgarður er 120 m. langur og $3\frac{3}{4}$ m á hæð. Að ofan er hann 3 m. breiður, en hliðarnar hallast út á við og er $4\frac{1}{4}$ m. hvorum megin. Hve lengi eru 25 menn að hlaða garð þennan, þegar 1 maður hleður daglega $1\frac{2}{3}$ tenings-m.?



Fyrst finn eg þann hluta af grunnlínunni, sem eigi er gefinn.
$4\frac{1}{4}^2 = 3\frac{3}{4}^2 + x^2$;
$\left(\frac{17}{4}\right)^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2$;

$18\frac{1}{16} = 14\frac{1}{6} + x^2$, $18\frac{1}{6} - 14\frac{1}{6} = x^2$; $x^2 = 4$; $x = 2$; Nú legg eg annan Δ við hliðina á hinum eins og myndin sýnir þá finn eg flatarmál þessa nýja samsíðungs og rétthyrnings; $\frac{15\cdot 2}{4\cdot 2} = 7\frac{1}{2}$ m; Flatarmál beggja Δ er $= 7\frac{1}{2}$ m;

Síðan finn eg flatarmál hins upphaflega og stóra □
$\frac{15\cdot 3}{4} = 11\frac{1}{4}$ m; Flatarmál alls garðsins $18\frac{3}{4}$ m;

$\frac{120\cdot 75}{4} = 2250$ teningsmetrar er allur garðurinn.

1 maður hleður á 1 degi $1\frac{2}{3}$ teningsmeter. $x = \frac{2250\cdot 3}{25\cdot 5} = 54$.
25 menn hlaða — x dögum 2250 — — — — 1

25 menn hlaða garðinn á 54 dögum.

3.

$$\frac{0,0425 \cdot 55 \cdot 0,2^3}{\frac{6}{19} \cdot 0,7125 \cdot 0,024 - 0,02^2 + \frac{1}{200}}$$

$$= \frac{0,0425 \cdot 3125 \cdot 0,008}{0,3158 \cdot 0,7125 \cdot 0,024 - 0,0004 + 0,005} = \frac{\cancel{425} \cdot 3125\,0000 \cdot \cancel{80}}{\cancel{3158} \cdot \cancel{7125} \cdot \cancel{240} + 46}$$

17 · 15625000 · 1

1579 · 285 · 3 · 57

$$\frac{265625000}{270055} = 983,5959$$

11

4. dæmi.

3 stafa tala er 47 sinnum þversumman. Ef ein~~g~~ingartölust. er dreginn frá hundraðs-tölstafnum, kemur út helmingur af tugatölustafnum, og ef hundraðs-tölustafnum er deilt inn í sjálfa töluna kemur út kvótinn 105 og afgangurinn 6. Finn töluna!

Einingartölstafinn kalla eg z; tugatölustafinn y og hundraðstölustafinn x; þá er sjálf talan $100x+10y+z$. Samkvæmt því, sem gefið er, þá er $47(x+y+z)=100x+10y+z$ (1);

$x - \cancel{y}z = \frac{y}{2}$ (2); $\frac{100x+10y+z}{x} = 105\frac{6}{x}$;

$47x+47y+47z=100x+10y+z$ (1); $37y+46z=53x$ (1);

$-y+2x-2z=0$ (2); $100x+10y+z=105x+6$ (3);

$10y-5x+z=6$ (3); með 1. og 2. líkingu fæ jeg að

$$\begin{array}{rl} 37y+46z=53x & (1) \\ -23y-46z=-46x & (2) \\ \hline 14y=7x; & x=2y, \ (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -y+2x-2z=0 & (2) \\ 20y-10x+2z=12 & (3) \\ \hline 19y-8x=12 & (5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 19y-8x=12 & (5) \\ -16y+8x=0 & (4) \\ \hline 3y=12; & y=4;\ x=8;\ z=6. \end{array}$$

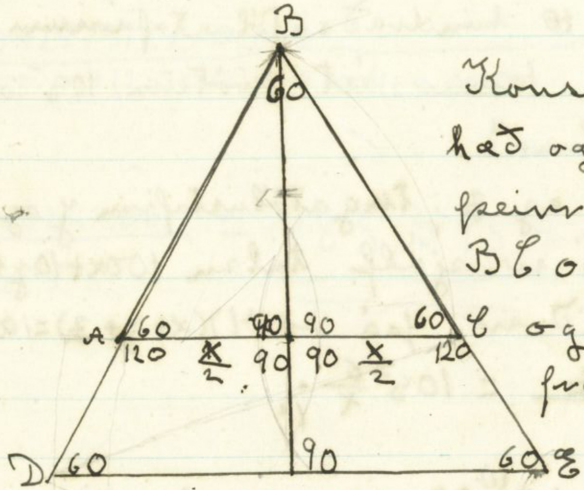
~~Talan er 423.~~

Talan er: 846.

R

5. dæmi.

Gefinn er jafnhliða △. Konstruera annan jafnhliða △ með ~~helmingi~~ tvöfalt stærra flatarmáli!



Konstruation: ~~Fyrst~~ Ég lengi hæð og grunnlínu um $\frac{1}{2}$ lengd þeirra og lengi síðan hliðarnar BC og AB að punktunum D og E. og er þá þessi nýi △, sem fram kemur helmingi stærri en sá gamli (því að flatarmál △ er $\frac{1}{2}$ produkt grunnlínu og hæðar).

Auðséð er, ef útar reiknað með almennum reikningi að nýi △ er jafnhliða.

~~Flatarmál △ ABC er $\frac{x \cdot h}{2}$; flatarmál □ ACDE~~ er einnig $\frac{x \cdot h}{2}$; þá er auðséð að ADE er helmingi stærri en ABC.

6. dæmi.

~~A. fær~~ A. fær eitt ár $3\frac{1}{5}$ % af peningum sínum. B. fær á sama tíma $7\frac{1}{2}$ % af sínum. Nú eru peningar þeirra í hlutfallinu $\frac{3}{5}$ og leggja þeir þá saman í verslun um tveggja ára bil. Fyrra árið græða þeir $7\frac{2}{13}$ %, en síðara árið skaðast þeir um $14\frac{2}{7}$ %. Hvað átti hvor þeirra upphaflega, þegar eignir þeirra eftir þessi 2 ár eru 825,00 kr.?

$\frac{A\ X}{B\ Y}$

1. dæmi.

Maður kaupir $7\frac{1}{2}$ þúsund múrsteina og sendir þá til bæjarins með skipi og greiðir farmgjald 4% af innkaupsverði; því næst selur hann alla múrsteinana fyrir 234,78 og græðir á því $7\frac{1}{2}$% af öllum útgjöldum sínum. Hve(mikið hefur hann gefið fyrir 1000 múrsteina í innkaupi.

Ég kalla verðið á þúsund steinum x, þá hefur hann samtals borgað fyrir steinana í innkaupi $7\frac{1}{2}x$. Þegar það er svo hækkað um 4% lítur ~~líkingin~~ það svona út $\frac{15x \cdot 104}{2 \cdot 100}$; þegar það er hækkað um $7\frac{1}{2}$% lítur þetta svona út $\cancel{\frac{15x \cdot 104 \cdot 215}{2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 2}} = \frac{15x \cdot 104 \cdot 215}{2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 2}$,

Þá lítur líkingin svona út: $\frac{15x \cdot 104 \cdot 215}{2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 2} = 234,78$.

$26 \cdot 15x \cdot 215 = 2347800$, $83850x = 2347800$, $x = 28$,

Þúsund steinar kostuðu 28 kr

R

2. dæmi.

Víxill er diskonteraður með $6\frac{1}{2}$% p.a. fjórum mánuðum fyrir gjalddaga og útborgast með 590 kr 25 au. Hve há var upphæð víxilsins?

Upphæð hans er x; þá er $x = 590,25$ kr + diskonto.
Þá má líkingin vera svona $x = 590,25 + \frac{13x}{2 \cdot 100} \cdot \frac{1}{4}$;
$800x = 472200 + 13x$, $787x = 472200$; $x = 600$;

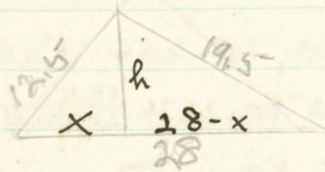
R

Upphæð víxilsins var 600,00 kr

3. dæmi

Reikna út flatarmál Δ, þegar hliðarnar eru 12,5 m. 19,5 m. 28 m.

Skýringar á merkjunum eru á myndinni.



$h^2 + x^2 = 12{,}5^2$. $h^2 + (28-x)^2 = 19{,}5^2$.

$$12{,}5^2 = h^2 + x^2$$
$$19{,}5^2 = h^2 + (28-x)^2$$
$$224 = 784 - 56x$$

$56x = 560$; $x = 10$; nú finn eg h.

$h^2 = 12{,}5^2 + 10^2$; $h^2 = 56{,}25$. $h = \sqrt{56{,}25}$; $h = 7{,}5$.

Flatarmál Δ er $\frac{7{,}5 \cdot 28}{2} = \underline{105\ m^2}$; R

4. dæmi

$\frac{7}{x} + \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = 32$; $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 0$; $\frac{2}{x} + \frac{9}{y} - \frac{7}{z} = 22$;

Finn x, y og z;

Eg kalla $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$; $\frac{1}{z} = c$;

$7a + 5b - 6c = 32$ (1). $3a - 4b + 5c = 0$ (2). $2a + 9b - 7c = 22$ (3).

$$35a + 25b - 30c = 160 \ (1)$$
$$18a - 24b + 30c = 0 \ (2)$$
$$53a + b = 160 \ (4)$$

$$21a - 28b + 35c = 0 \ (2)$$
$$10a + 45b - 35c = 110 \ (3)$$
$$31a + 17b = 110 \ (5)$$

$$31a + 17b = 110 \ (5)$$
$$901a + 17b = 2720 \ (4)$$
$$870a = 2610.$$

$a = 3$

$159 + b = 160$. $b = 1$; $9 - 4 + 5c = 0$; $5c = -5$; $c = -1$.

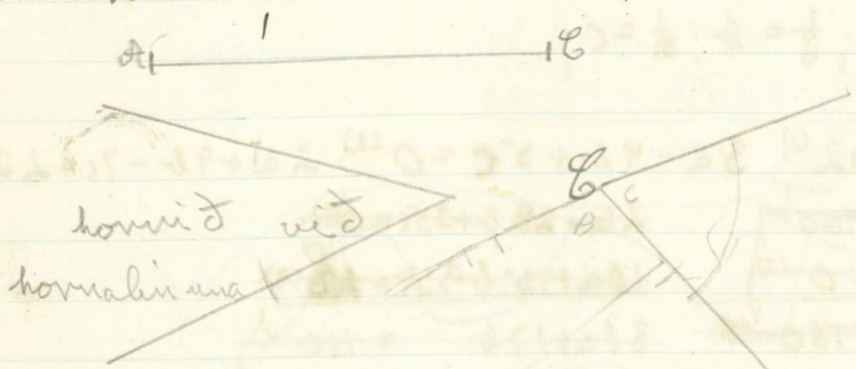
$1 = 3x$. $x = \frac{1}{3}$. $\frac{1}{y} = 1$; $1 = y$; $\underline{y = 1}$.

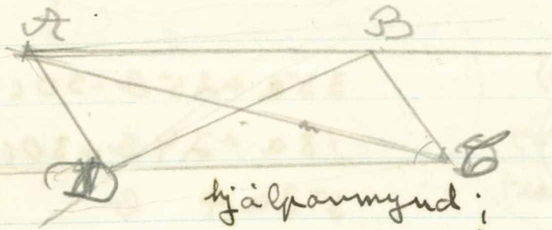
$\frac{1}{z} = -1$; $1 = -z$; $\underline{z = -1}$.

R

5. dæmi.

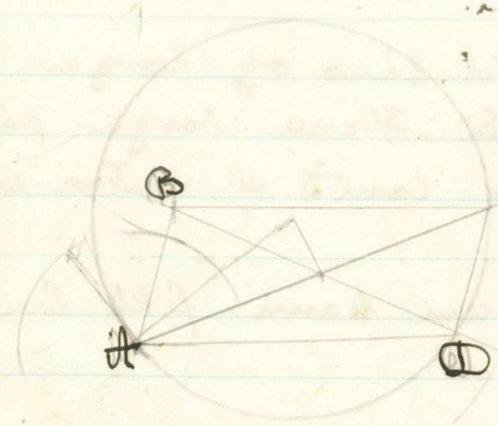
Konstruera samsíðung ABCD, þegar gefið er hornalínan AC, hornið BCD og hornið milli hornalínanna. Teikna fyrinast með radius = $\frac{1}{3}$ AC, sirkil, er snerti báðar hornalínurnar.





hjálparmynd;

þegar eitt horn í * samsíðungi er gefið, þá er hægt að finna öll hin hornin þar, sem móttsetta hornið er jafnstórt því gefna, en hin eru þá 360 mínus hinum tveimur, og svo ef það er deilt með tveimur er ~~hægtna~~ auðið að finna stærð allra hornana. fyrinast dreg eg AC og þar næst skifti eg AC í helminga, og dreg hornalínu hornið. Þá er hornið D dregið með sjónarhornsveglinum. Þá er hægt að draga samsíðunginn með því að setja lengd AD



og setja hana út frá C samsíða AD. Þá er samsíðungurinn kominn

R

1. dæmi

Maður hefur tekið peninga til láns og borgar þá aftur með ventum eftir 8 mánuði. Hann borgar þá alls 858,40 kr. Hve stórt er lánið ef ventan er $4\frac{1}{6}$ % p.a.

Ég kalla x upphæðina, sem hann fékk lánaða.

$\xcancel{x + \frac{25\cdot x\cdot 8}{6\cdot 100\cdot 12} = \ldots}$

$$x + \frac{25x\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{6}_{3}\cdot 100\cdot\cancel{12}_{3}} = 858,40; \quad x + \frac{25x}{900} = 858,40;$$

$$900x + 25x = 858,40; \quad 925x = 858,40; \quad x = 835,20.$$

R

Upphæðin var 835,20 kr.

2. dæmi) $\frac{0,017\cdot 0,5^4\cdot 0,2^2\cdot 70^3}{\frac{5}{17}\cdot 0,2975\cdot 0,018+\frac{7}{40000}} = \frac{0,017\cdot 0,0625\cdot 0,04\cdot 343000}{0,001575+0,000175}$

$$= \frac{14,5775}{0,00175} = \frac{1457750}{175} = \frac{58310}{7} = \underline{\underline{8330}}$$

R

3. dæmi.

Þrjár málmkúlur, sem hafa radíana 8 sm, 6,4 sm og 4,8 sm eru bræddar saman í sívalningsmyndaðan stöpul þannig að þvermál hans 19 sm, hver verður þá hæð hans?

Ég kalla hæðina x. síðan set ég þetta upp í líkingu samkvæmt þar að lútandi formúlu (sjá rúmmálsfræðina).

$$x\cdot\frac{19\cdot 19\cdot 22}{2\cdot 2\cdot 7} = \frac{4\cdot 22\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{3\cdot 7} + \frac{4\cdot 22\cdot 32\cdot 32\cdot 32}{3\cdot 7\cdot 5\cdot 5\cdot 5} + \frac{4\cdot 22\cdot 24\cdot 24\cdot 24}{3\cdot 7\cdot 5\cdot 5\cdot 5};$$

$$\frac{7942x}{28} = \frac{45056}{21} + \frac{2883584}{2625} + \frac{1216512}{2625};$$ (svo stytti ég koficentinn við x með 2)

$$\frac{3971x}{14} = \frac{3244032}{805}; \quad 3196655x = 45416448. \quad \xcancel{\ldots}$$

$$x = 14\frac{963278}{3196655};$$

Hæðin er: $14\frac{963278}{3196655}$;

$$X = \frac{16(8^3+6,4^3+4,8^3)}{3,19^2}$$

$$X = 12,36$$

4. dæmi.

$$\left(\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc}\right) : \left(1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}\right)$$ gjörist svo ein-falt sem auðið er.

Fyrst gjöri eg $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc}$ eins einfalt og hægt er;

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} = \frac{a-b+abc-b^2c+b-c+ab^2-abc}{(1+ab)\quad(1+bc)} = \frac{a-b^2c-c+ab^2}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$= \frac{(a-c)+(a-c)b^2}{(1+ab)(1+bc)} = \frac{(a-c)(1+b^2)}{(1+ab)(1+bc)}$$. Þá er það sanna, sem eg sný mér að:

$$1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)} = \frac{(1+ab)(1+bc) - (a-b)(b-c)}{(1+ab)\quad(1+bc)} = \frac{1+bc+ab+ab^2c-ab+ac+b^2-bc}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$= \frac{1+ab^2c+ac+b^2}{(1+ab)(1+bc)} = \frac{1+b^2+ac(1+b^2)}{(1+ab)(1+bc)} = \frac{(1+b^2)(1+ac)}{(1+ab)(1+bc)}.$$

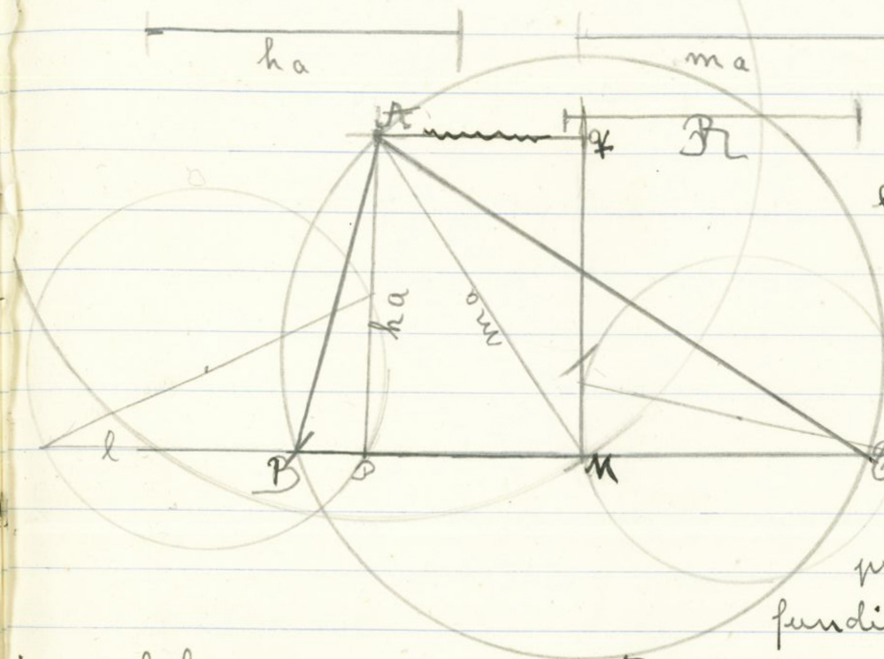
$$\frac{(a-c)(1+b^2)}{(1+bc)\quad(1+ab)} : \frac{(1+b^2)(1+ac)}{(1+bc)(1+ab)} = \frac{(a-c)(1+b^2)}{(1+bc)(1+ab)} \cdot \frac{(1+bc)(1+ab)}{(1+b^2)(1+ac)}$$

$$\frac{a-c}{1+ac}.$$

K

5. dæmi.

Teikna △ ABC af ha, ma og radíus umritaðs sirkils (R)



Lýsing:

Fyrst dreg eg línu l á flötinn. Tek einhvern punkt á henni B, dreg hornrétta línu á hana, marka ha þar út á og er þá punkturinn A einnig fundinn. Síðan tek eg í sirkilinn ma og sting honum niður í A dreg síðan hring og þar, sem hann sker l er ~~miðpunkt~~ miðpunktur línunnar a, hann kalla eg M. Frá M dreg eg línu q hornrétta á l. Dreg síðan hring með R fyrir radía og A fyrir sentrum, þar sem sá ~~hringur~~ hringur sker q er sentrum R; dreg síðan þann hring og snertir hann af sjálfu sér punktinn A og þarsem hann sker l eru punktarnir B og C, dreg síðan △ ABC einsog myndin sýnir. q. e. d. Auðvitað verður ma að vera > ha

K

keila $\frac{\pi \cdot r^2}{3}$ $\boxed{\pi \cdot r \cdot s}$ keilub $= \cancel{\pi} \; \frac{h}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 + r^2,$

$4\pi \cdot r^2$ | $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ | k^3 | $\frac{g\,h}{3}$ | $(\pi \cdot R^2)\,h$

$h \cdot 2\pi \cdot r + 2\pi \cdot r^2$ | $\pi \cdot h \left(\frac{2R + r}{3}\right)^2$

$\frac{h}{3} \cdot \cancel{\pi} (G + g + \sqrt{g \cdot G}$

37
37
259
111
1369

53
17
371
53
901

258
5
1290
2
~~[illegible]~~ 8